a

Mnożenie

Początkowo może wydawać się, że mnożenie to trudniejsza forma dodawania. Z czasem przekonasz się, że dodawanie to trudniejsza forma mnożenia. Biblia nakazuje: „Rośnijcie i mnóżcie się, i napełniajcie ziemię”. Nie wyjaśnia niestety, w jaki sposób wykonuje się mnożenie. Postaramy się rozjaśnić wszystkie wątpliwości.

Rzędy i kolumny

Intuicje

Przyjrzyjmy się łazience pana Janusza. Spoglądając w dół, możemy podziwiać kunszt wykończeń podłogowych oraz harmonię układu płytek ceramicznych. Aby pozwolić Ci cieszyć oczy dłużej, specjalnie dla Ciebie przerysowaliśmy kafelki poniżej:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

Matematyczna rządza poznawania świata skłania nas do przemyśleń: z ilu kafelków składa się podłoga pana Janusza? Możemy policzyć wszystkie kafelki po kolei i dojść do wniosku, że jest ich 24. Możemy też zauważyć, że kafelki rozłożone są na równe rzędy i kolumny: mamy 4 rzędy, a w każdym z nich 6 kafelków.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |

Łączną liczbę kafelków można więc zapisać jako . Matematyków boli ręka od pisania czterokrotnie liczby 6, więc użyją krótszej formy:

Czasami w nieprofesjonalnych źródłach możesz znaleźć też zapis

lub

Trzymajmy się jednak jedynej słusznej metody[[1]](#footnote-1) i używajmy symbolu ⋅ na określenie mnożenia. Kropkę tę czytamy jako „razy”. Zapis (cztery razy sześć) mówi tyle, że należy cztery razy dodać do siebie szóstkę. Można więc zapisać

Motyw mnożenia pozwoliliśmy sobie przemycić już w temacie o dodawaniu:

Jeśli 5 razy w ciągu dnia wypijesz dwie szklaneczki[[2]](#footnote-2), to łącznie wypijesz 10 szklaneczek.

2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10

Dzięki potężnym narzędziom, którymi teraz władamy, możemy zastosować krótszy zapis[[3]](#footnote-3):

* Jeśli każda z 10 owiec zjada 3 marchewki dziennie, to pasterz musi dostarczać 30 marchewek na dzień.
* Jeśli rano, w południe i wieczorem zjesz po 4 pączki,[[4]](#footnote-4) to w ciągu dnia zjesz 12 pączków.
* Tydzień ma 7 dni, a każdy dzień to 24 godziny. W takim razie w ciągu tygodnia upływa 168 godzin.

Nazewnictwo

Intuicje

W dodawaniu mieliśmy do czynienia ze składnikami, które dawały razem sumę. W przypadku mnożenia mówimy o *czynnikach*, które po *wymnożeniu* dają wynik, czyli *iloczyn*.

* W działaniu czynnikami są 5 i 6, a wynikiem (iloczynem) 30.
* W działaniu czynnikami są 12 i 2, a wynikiem (iloczynem) 24.
* W działaniu czynnikami są 2, 3 i 4, a wynikiem (iloczynem) 24.

Własności mnożenia

Rozszerzenie

Mamy przyjemność ponownie wkroczyć do łazienki pana Janusza.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

Poczyniliśmy słuszne spostrzeżenie, że 24 kafelki można rozbić[[5]](#footnote-5) na 4 rzędy po 6 kafli i zapisać

Równie dobrze jednak możemy spojrzeć na kafle jako na 6 kolumn po 4 kafle.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

W takim razie

Co więcej, możemy spełnić swoje dzikie fantazje i stworzyć łazienkę o dowolnych wymiarach, czyli mającą dowolną ilość rzędów i kolumn kafli. Za każdym razem możemy zapisać, że

albo

Nie ma znaczenia, w jakiej kolejności zapiszemy czynniki. W takim razie mnożenie jest przemienne.

Możemy zauważyć jeszcze jedną cechę mnożenia. W tym celu zaszalejemy i stworzymy trzy łazienki.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

Jeśli chcemy policzyć wszystkie kafle w tych trzech łazienkach, możemy najpierw policzyć, ile jest kafli w jednej łazience, a potem stwierdzić, że w 3 łazienkach jest ich 3 razy więcej.

Możemy też spojrzeć na problem inaczej: możemy potraktować te trzy łazienki jak jedną dużą, która ma 3 razy więcej rzędów kafli. W takiej łazience mamy rzędów oraz 6 kolumn kafli, czyli razem kafle.

Tak więc działanie można wykonać na dwa sposoby: najpierw mnożąc 3 i 4, a potem wynik przez 6, albo najpierw mnożąc 4 i 6, a wynik przez 3. Oznacza to, że mnożenie jest łączne.

Mnożenie w słupku

Warsztat

Gdy przyjdzie Ci wymnożyć dwie liczby, np. , zawsze możesz przedstawić mnożenie jako sumę:

i obliczyć wynik przez dodawanie kolejnych składników:

Metoda ta zawsze jest poprawna, jednak cokolwiek pracochłonna. Zapewniamy, że w swojej karierze matematycznej mnożenie będziesz napotykał na każdym kroku. Z tego powodu przynajmniej mnożenie liczb jednocyfrowych dobrze jest opanować[[6]](#footnote-6) na wysokim poziomie. Podstawą każdego wprawnego rachmistrza[[7]](#footnote-7) jest *tabliczka mnożenia*, która działa bardzo podobnie do tabliczki dodawania.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** |
| **0** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **1** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| **2** | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| **3** | 0 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| **4** | 0 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| **5** | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| **6** | 0 | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| **7** | 0 | 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| **8** | 0 | 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| **9** | 0 | 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

Aby znaleźć odpowiedź na pytanie, ile wynosi , szukamy kolumny zatytułowanej „7” oraz wiersza zatytułowanego „8” i odczytujemy wynik 56 na ich przecięciu.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** |
| **0** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **1** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| **2** | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| **3** | 0 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| **4** | 0 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| **5** | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| **6** | 0 | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| **7** | 0 | 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| **8** | 0 | 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| **9** | 0 | 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

Ponieważ mnożenie jest przemienne, równie dobrze możemy znaleźć kolumnę zatytułowaną „8” i wiersz zatytułowany „7”.

Gdy chcemy wykonać mnożenie większych liczb, możemy skorzystać z metody *mnożenia w słupku* (*mnożenia pisemnego*). Spróbujmy pomnożyć 134 przez 2. Zaczynamy tak, jak przy dodawaniu w słupku: zapisujemy obydwie liczby jedna pod drugą z wyrównaniem do prawej i podkreślamy.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 3 | 4 |
| ⋅ |  |  | 2 |
|  |  |  |  |

Teraz mnożymy kolejne cyfry górnej liczby przez 2 i wynik zapisujemy pod kreską.

* , więc pod 4 piszemy 8
* , więc pod 2 piszemy 6
* , więc pod 1 piszemy 2

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 3 | 4 |
| ⋅ |  |  | 2 |
|  | 2 | 6 | 8 |

To był najprostszy przypadek mnożenia. Teraz dajmy się ponieść mnożeniu przez liczbę większą niż jednocyfrową:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 3 | 0 | 2 |
| ⋅ | 2 | 1 | 3 |
|  |  |  |  |

Zaczynamy od mnożenia górnej liczby przez cyfrę jedności dolnej.

* , więc pod 2 piszemy 6
* , więc pod 0 piszemy 0
* , więc pod 3 piszemy 9

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 3 | 0 | 2 |
| ⋅ | 2 | 1 | 3 |
|  | 9 | 0 | 6 |

Teraz będziemy mnożyć górną liczbę przez cyfrę dziesiątek dolnej. Wynik będziemy zapisywać pod poprzednim wynikiem, dodatkowo z przesunięciem o jedną cyfrę w lewo.

* , więc wynik 2 piszemy pod dwójką z przesunięciem w lewo.
* , więc wynik 0 piszemy pod zerem z przesunięciem w lewo.
* , więc wynik 3 piszemy pod trójką z przesunięciem w lewo

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 3 | 0 | 2 |
| ⋅ | 2 | 1 | 3 |
|  | 9 | 0 | 6 |
| 3 | 0 | 2 |  |

Konsekwentnie mnożymy górną liczbę przez cyfrę setek dolnej. Wynik zapisujemy pod poprzednim z przesunięciem o dwie cyfry w lewo.

* , więc wynik 4 piszemy pod dwójką z podwójnym przesunięciem w lewo.
* , więc wynik 0 piszemy pod zerem z podwójnym przesunięciem w lewo.
* , więc wynik 6 piszemy pod trójką z podwójnym przesunięciem w lewo.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 3 | 0 | 2 |
| ⋅ |  | 2 | 1 | 3 |
|  |  | 9 | 0 | 6 |
|  | 3 | 0 | 2 |  |
| 6 | 0 | 4 |  |  |

Najgorsze za nami. Teraz wszystkie trzy otrzymane wyniki musimy do siebie dodać. Robimy to znaną nam już metodą dodawania w słupku.

* 6 występuje samodzielnie, więc przepisujemy ją bez zmian.
* , więc pod zerem i dwójką piszemy 2.
* . Wynik 13 rozbijamy: pod 9, 0 i 4 piszemy trójkę, zaś jedynkę przenosimy do następnej kolumny. Dla przejrzystości zapisu nie będziemy jej zapisywać, miejmy ją w pamięci.
* . Pod trójką i zerem zapisujemy 4. Jeśli masz wątpliwości, skąd wzięło się 1 na początku tego dodawania, przeczytaj jeszcze raz poprzedni punkt.
* 6 występuje samodzielnie, więc przepisujemy ją bez zmian.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | 3 | 0 | 2 |
| ⋅ |  |  | 2 | 1 | 3 |
|  |  |  | 9 | 0 | 6 |
|  |  | 3 | 0 | 2 |  |
| + | 6 | 0 | 4 |  |  |
|  | 6 | 4 | 3 | 2 | 6 |

Otrzymaliśmy wynik 64326. Zasłużyłeś na nagrodę. Będzie nią mnożenie liczb 629 i 204.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 6 | 2 | 9 |
| ⋅ | 2 | 0 | 4 |
|  |  |  |  |

Zaczynamy od mnożenia górnej liczby przez 4. Mnożymy i otrzymujemy 36. Sytuacja problematyczna, bo obydwu cyfr nie zapiszemy pod kreską. Robimy podobnie jak w przypadku dodawania – rozbijamy 36 na 3 oraz 6, z czego 6 piszemy jako wynik, zaś 3 przenosimy do następnej kolumny.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | 3 |  |
|  | 6 | 2 | 9 |
| ⋅ | 2 | 0 | 4 |
|  |  |  | 6 |

Teraz mnożymy . Trójkę, którą sobie zanotowaliśmy, dodajemy teraz do wyniku. Dostajemy 11. Ponieważ znowu wynik jest dwucyfrowy, rozbijamy go na dwie cyfry: pod kreską piszemy 1 i przenosimy 1 do następnej kolumny.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 3 |  |
|  | 6 | 2 | 9 |
| ⋅ | 2 | 0 | 4 |
|  |  | 1 | 6 |

Mnożymy . Do wyniku dodajemy zanotowaną jedynkę i dostajemy 25. Wynik rozbijamy na 2 i 5.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 2 | 1 | 3 |  |
|  | 6 | 2 | 9 |
| ⋅ | 2 | 0 | 4 |
|  | 5 | 1 | 6 |

Pomnożyliśmy już wszystkie cyfry przez 4, ale mamy jeszcze zanotowaną dwójkę, więc przepisujemy ją jak stoi.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 2 | 1 | 3 |  |
|  | 6 | 2 | 9 |
| ⋅ | 2 | 0 | 4 |
| 2 | 5 | 1 | 6 |

Teraz przechodzimy do mnożenia przez 0. Większych problemów nie napotykamy, pamiętamy tylko o przesunięciu wyniku w lewo.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 2 | 1 | 3 |  |
|  | 6 | 2 | 9 |
| ⋅ | 2 | 0 | 4 |
| 2 | 5 | 1 | 6 |
| 0 | 0 | 0 |  |

Pozostaje nam wymnożyć górną liczbę przez 2. Obliczmy i wynik dwucyfrowy rozbijamy. 8 piszemy pod kreską z odpowiednim przesunięciem, a 1 notujemy w następnej kolumnie. Żeby uniknąć zgrzytów z poprzednimi notatkami, zapiszemy 1 jeszcze wyżej.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | 1 |  |
| 2 | 1 | 3 |  |
|  | 6 | 2 | 9 |
| ⋅ | 2 | 0 | 4 |
| 2 | 5 | 1 | 6 |
| 0 | 0 | 0 |  |
|  | 8 |  |  |

Mnożymy i dodajemy zanotowaną jedynkę. Dostajemy 5.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | 1 |  |
| 2 | 1 | 3 |  |
|  | 6 | 2 | 9 |
| ⋅ | 2 | 0 | 4 |
| 2 | 5 | 1 | 6 |
| 0 | 0 | 0 |  |
| 5 | 8 |  |  |

Mnożymy . Rozbijamy wynik na 1 i 2. Zanotowaną jedynkę możemy już przepisać bez zmian.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 1 |  | 1 |  |
|  |  | 2 | 1 | 3 |  |
|  |  |  | 6 | 2 | 9 |
| ⋅ |  |  | 2 | 0 | 4 |
|  |  | 2 | 5 | 1 | 6 |
|  |  | 0 | 0 | 0 |  |
| 1 | 2 | 5 | 8 |  |  |

Wszystkie trzy wyniki dodajemy.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | 1 |  | 1 |  |
|  |  |  | 2 | 1 | 3 |  |
|  |  |  |  | 6 | 2 | 9 |
| ⋅ |  |  |  | 2 | 0 | 4 |
|  |  |  | 2 | 5 | 1 | 6 |
|  |  |  | 0 | 0 | 0 |  |
| + | 1 | 2 | 5 | 8 |  |  |
|  | 1 | 2 | 8 | 3 | 1 | 6 |

No i poznaliśmy prawdę: . Jesteśmy przekonani, że ta informacja wzbogaciła Twoje życie.

Rozszerzenie

[wymagana znajomość tematu: Kolejność wykonywania działań]

Jeśli ciągle Ci mało, możemy dociec logicznych podstaw mnożenia w słupku. Spójrzmy na sympatyczny przykład .

Już na tym etapie widzimy, że obliczenie sprowadza się do wykonania trzech mnożeń dających trzy wyniki, które na koniec należy zsumować. Weźmy każde z nich osobno. Sprowadzają się one do pomnożenia każdej cyfry pierwszego czynnika przez drugi czynnik

Otrzymujemy do zsumowania trzy liczby: 906, 3020 i 60 400. Zauważmy, że gdyby chcieć je zsumować sposobem pisemnym, ułożylibyśmy je tak:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | 9 | 0 | 6 |
|  |  | 3 | 0 | 2 | 0 |
| + | 6 | 0 | 4 | 0 | 0 |
|  |  |  |  |  |  |

Przypomnijmy, jak wygląda to sumowanie w całym słupku:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | 3 | 0 | 2 |
| ⋅ |  |  | 2 | 1 | 3 |
|  |  |  | 9 | 0 | 6 |
|  |  | 3 | 0 | 2 |  |
| + | 6 | 0 | 4 |  |  |
|  | 6 | 4 | 3 | 2 | 6 |

Łatwiej teraz zrozumieć, dlaczego każdy kolejny wynik mnożenia zapisywaliśmy z przesunięciem o cyfrę w lewo: mnożenie przez cyfrę dziesiątek daje wynik „10 razy większy”, a więc mający jedno zero na końcu; mnożenie przez cyfrę setek daje wynik „100 razy większy”, a więc mający dwa zera na końcu. Zer tych nie piszemy, stosujemy za to wymowną przerwę, a wynik ostateczny dostajemy i tak poprawny.

Kontrowersyjne może się jeszcze wydawać sporządzanie tajemniczych notatek ponad całym słupkiem, które w pewnym momencie należy dodać do wyniku. Weźmy mnożenie 629 i 204, a konkretnie rozważmy ten fragment, w którym mnożymy .

mnożymy cyfrę jedności przez 4

rozbijamy wynik na 3 i 6

notujemy 3 w następnej kolumnie

mnożymy cyfrę dziesiątek przez 4

dodajemy zanotowane 3

rozbijamy wynik na 1 i 1

notujemy 1 w następnej kolumnie

mnożymy cyfrę setek przez 4

dodajemy zanotowane 1

rozbijamy wynik na 2 i 5

Dowód

[wymagana znajomość tematu: Algebra]

Poważnie nie wiem czy damy radę…

1. Chciałeś coś powiedzieć? [↑](#footnote-ref-1)
2. soku [↑](#footnote-ref-2)
3. Od razu chce się żyć. [↑](#footnote-ref-3)
4. to będziesz gruby. Po prostu. [↑](#footnote-ref-4)
5. Wiemy, że rozbijanie kafli to dobra rzecz, ale nie praktykuj tego w domu. [↑](#footnote-ref-5)
6. wkuć [↑](#footnote-ref-6)
7. gościa co dobrze liczy [↑](#footnote-ref-7)